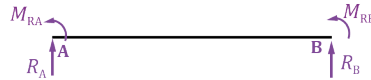


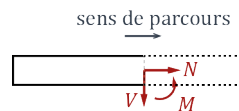
Formulaire résistance des matériaux – Calcul des poutres

Hypothèses et conventions

- Les sollicitations internes sont définies comme agissant de la partie à droite de la coupure sur la partie à gauche ;
- Les conventions de signe pour les réactions sont:
 - forces verticales positives orientées vers le haut ;
 - moments positifs dans le sens trigonométrique.



- Le repère local pour la position des sections et le calcul de la flèche est indiqué sur chaque figure ;
- Les conventions de signe pour les sollicitations internes sont :
 - effort normal positif dans le sens x local positif ;
 - effort tranchant positif dans le sens y local positif ;
 - moment fléchissant positif dans le sens trigonométrique.



- Les conventions de signe pour les diagrammes sont indiquées sur chaque figure.

Configurations traitées

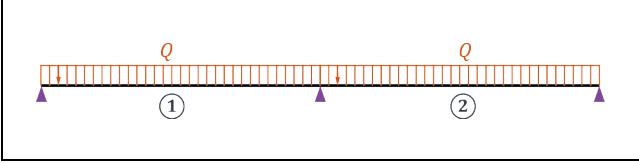
- Poutres isostatiques à une travée sur deux appuis (série Axx) ;
- Poutres isostatiques à deux travées sur deux appuis (série ACxx) ;
- Poutres hyperstatiques bi-encastées (série Bxx) ;
- Poutres isostatiques en console (série Cxx) ;
- Poutres hyperstatiques à une travée encastées-appuyées (série Dxx) ;
- Poutres hyperstatiques à deux travées, encastées-appuyées (série DCxx).

Pour chaque configuration, le formulaire donne généralement :

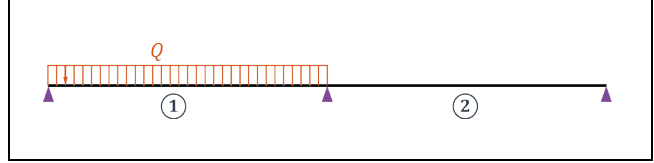
- Les réactions aux appuis ;
- L'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre ;
- La position et la valeur du moment maximal ;
- La déformée en flexion ;
- La flèche verticale en diverses sections, y compris la flèche maximale ;
- Les rotations au droit des sections singulières, le cas échéant ;
- L'énergie de déformation en flexion.

POUTRES CONTINUES À 2 TRAVÉES

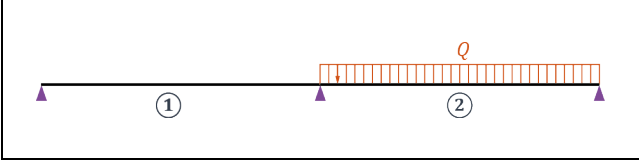
T2-01



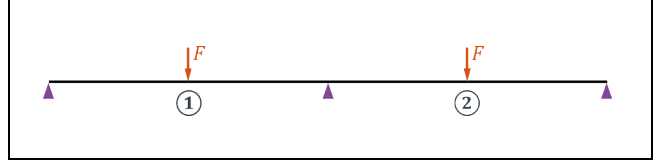
T2-02



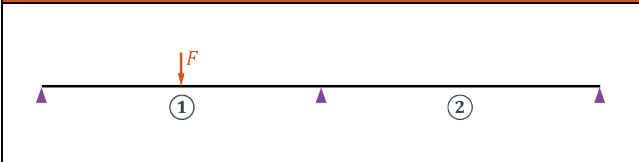
T2-03



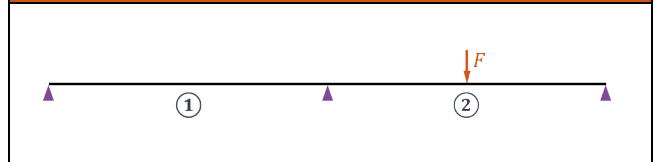
T2-04



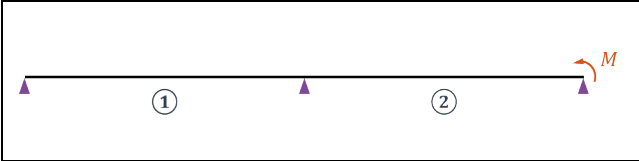
T2-05



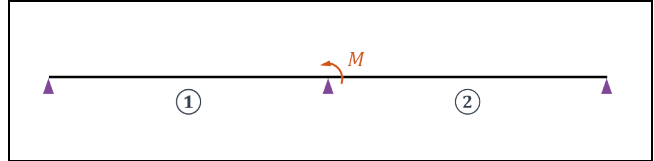
T2-06



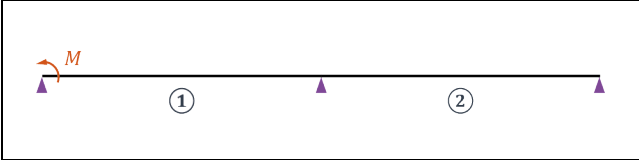
T2-07



T2-08



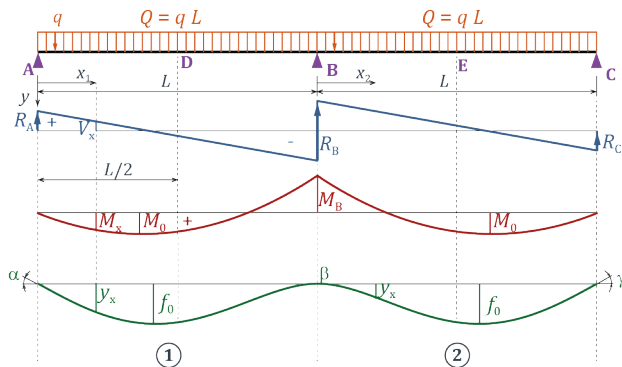
T2-09



R_A, R_B Réactions (efforts verticaux) aux appuis
 M_{RA}, M_{RB} Réactions (moments) aux appuis
 V Effort tranchant
 M Moment fléchissant
 M_0 Moment fléchissant maximal

$y(x)$ Déformée élastique en flexion
 f Flèche
 f_0 Flèche maximale
 α, β, γ Déformations angulaires

T2-01



$Q = qL$

$$R_A = R_C = \frac{3}{8}Q \quad R_B = \frac{5}{4}Q$$

$$V_A = -V_C = \frac{3}{8}Q \quad V_{B,1} = -V_{B,2} = -\frac{5}{8}Q$$

$$M_B = -\frac{Q L}{8} \quad M_D = M_E = \frac{Q L}{16}$$

$$M_0 = \frac{9}{128} Q L$$

$$f_0 \approx \frac{Q L^3}{185 EI} \quad \tan \alpha = -\tan \gamma = -\frac{Q L^2}{48 EI}$$

① $V(x_1) = \frac{Q}{8L} (3L - 8x_1)$

$M(x_1) = \frac{Q}{8L} x_1 (3L - 4x_1)$

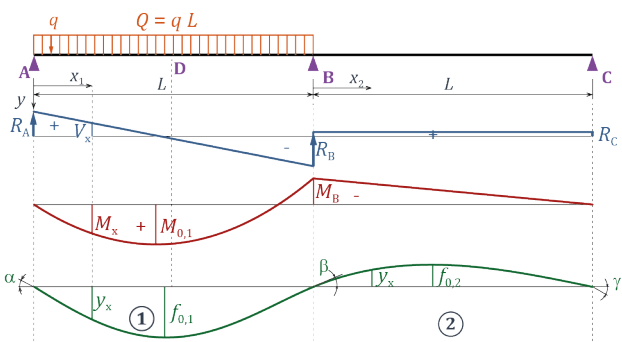
$y(x_1) = \frac{Q}{48 EI L} (x_1 - L)^2 (L + 2x_1)$

② $V(x_2) = \frac{Q}{8L} (5L - 8x_2)$

$M(x_2) = \frac{Q}{8L} (L - x_2)(4x_2 - L)$

$y(x_2) = \frac{Q}{48 EI L} (x_2 - L)(2x_2 - 3L)$

T2-02



$$R_A = \frac{7}{16}Q \quad R_B = \frac{5}{8}Q \quad R_C = -\frac{1}{16}Q$$

$$V_A = \frac{7}{16}Q \quad V_{B,1} = -\frac{9}{16}Q \quad V_{B,2} = V_C = \frac{Q}{16}$$

$$M_B = -\frac{Q L}{16} \quad M_D = \frac{3}{32} Q L$$

$$M_{0,1} = \frac{49}{512} Q L \quad \text{pour } x_{0,1} = \frac{7}{16}L$$

$$f_{0,1} \approx \frac{7}{768} \frac{Q L^3}{EI} \quad f_{0,2} = -\frac{\sqrt{3}}{432} \frac{Q L^3}{EI}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{96} \frac{Q L^2}{EI} \quad \tan \beta = -\frac{Q L^2}{48 EI} \quad \tan \gamma = \frac{Q L^2}{96 EI}$$

① $V(x_1) = \frac{Q}{16L} (7L - 16x_1)$

$M(x_1) = \frac{Q}{16L} x_1 (7L - 8x_1)$

$y(x_1) = \frac{Q}{96 EI L} x_1 (L - x_1)[3L(L + x_1) - 4x_1^2]$

② $V(x_2) = \frac{Q}{16}$

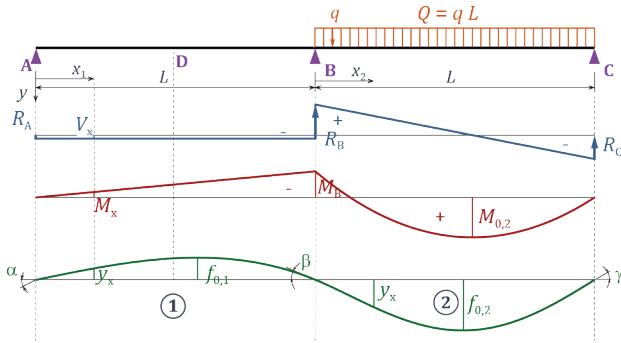
$M(x_2) = -\frac{Q}{16} (L - x_2)$

$y(x_2) = -\frac{Q}{96 EI} x_2 (L - x_2)(2L - x_2)$

R_A, R_B Réactions (efforts verticaux) aux appuis
 M_{RA}, M_{RB} Réactions (moments) aux appuis
 V Effort tranchant
 M Moment fléchissant
 M_0 Moment fléchissant maximal

$y(x)$ Déformée élastique en flexion
 f Flèche
 f_0 Flèche maximale
 α, β, γ Déformations angulaires

T2-03



$$R_A = -\frac{1}{16}Q \quad R_B = \frac{5}{8}Q \quad R_C = \frac{7}{16}Q$$

$$M_B = -\frac{Q L}{16}$$

$$M_{0,2} = \frac{49}{512}Q L \quad \text{pour } x_{0,2} = \frac{9}{16}L$$

$$f_{0,2} \approx \frac{7}{768} \frac{Q L^3}{EI} \quad f_{0,1} = -\frac{\sqrt{3}}{432} \frac{Q L^3}{EI}$$

$$\tan \gamma = \frac{3}{96} \frac{Q L^2}{EI} \quad \tan \beta = -\frac{Q L^2}{48 EI} \quad \tan \alpha = \frac{Q L^2}{96 EI}$$

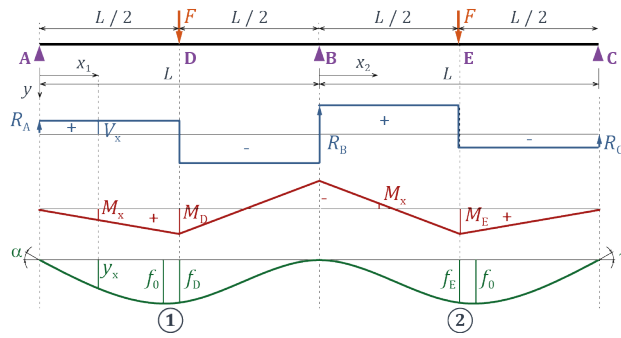
$$\textcircled{1} \quad \left\{ \begin{array}{l} V(x_1) = -\frac{Q}{16} \\ M(x_1) = -\frac{Q x_1}{16} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} V(x_2) = \frac{Q}{16 L} (9 L - 16 x_2) \\ M(x_2) = \frac{Q}{16 L} (L - x_2)(8 x_2 - L) \end{array} \right.$$

$$y(x_1) = -\frac{Q}{96 EI} x_1 (L^2 - x_1^2)$$

$$y(x_2) = \frac{Q}{96 EI L} x_2 (L - x_2)[2 L^2 + 5 L x_2 - 4 x_2^2]$$

T2-04



$$R_A = R_C = \frac{5}{16}F \quad R_B = \frac{11}{8}F$$

$$V_A = -V_C = \frac{5}{16}F \quad V_{B,1} = -V_{B,2} = -\frac{11}{16}F$$

$$M_B = -\frac{3}{16}F L \quad M_D = M_E = \frac{5}{32}F L$$

$$f_0 = \frac{\sqrt{5}}{240} \frac{F L^3}{EI} \quad f_D = f_E = \frac{7}{768} \frac{F L^3}{EI}$$

$$\tan \alpha = -\tan \gamma = -\frac{F L^2}{32 EI}$$

$$\textcircled{1} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{AD}(x_1) = \frac{5}{16}F \\ V_{DB}(x_1) = -\frac{11}{16}F \end{array} \right.$$

$$\textcircled{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{BE}(x_2) = \frac{11}{16}F \\ V_{EC}(x_2) = -\frac{5}{16}F \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{AD}(x_1) = \frac{5}{16}F x_1 \\ M_{DB}(x_1) = \frac{F}{16}(8 L - 11 x_1) \\ M_{BE}(x_2) = \frac{F}{16}(11 x_2 - 3 L) \\ M_{EC}(x_2) = \frac{5}{16}F(L - x_2) \end{array} \right.$$

$$y_{AD}(x_1) = \frac{F}{96 EI} x_1 (3 L^2 - 5 x_1^2)$$

$$y_{DB}(x_1) = \frac{F}{96 EI} (L - x_1)^2 (11 x_1 - 2 L)$$

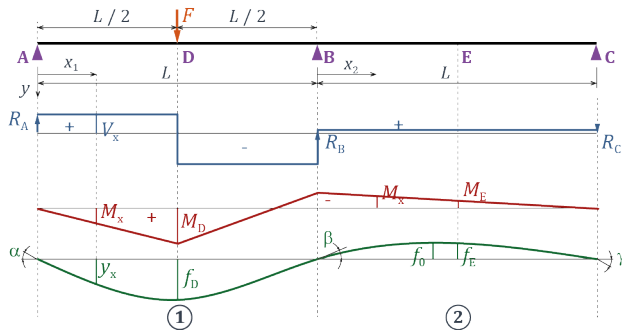
$$y_{BE}(x_2) = \frac{F}{96 EI} x_2^2 (9 L - 11 x_2)$$

$$y_{EC}(x_2) = \frac{F}{96 EI} (x_2 - L)(5 x_2^2 - 10 L x_2 + 2 L^2)$$

R_A, R_B Réactions (efforts verticaux) aux appuis
 M_{RA}, M_{RB} Réactions (moments) aux appuis
 V Effort tranchant
 M Moment fléchissant
 M_0 Moment fléchissant maximal

$y(x)$ Déformée élastique en flexion
 f Flèche
 f_0 Flèche maximale
 α, β, γ Déformations angulaires

T2-05



$$R_A = \frac{13}{32}F \quad R_B = \frac{11}{16}F \quad R_C = -\frac{3}{32}F$$

$$V_A = \frac{13}{32}F \quad V_{B,1} = -\frac{19}{32}F \quad V_{B,2} = V_C = \frac{3}{32}F$$

$$M_B = -\frac{3}{32}FL \quad M_D = \frac{13}{64}FL \quad M_E = -\frac{3}{64}FL$$

$$f_D = \frac{23}{1536} \frac{FL^3}{EI} \quad f_E = -\frac{3}{512} \frac{FL^3}{EI}$$

$$f_{0,1} = \sqrt{\frac{3}{13}} \frac{FL^3}{32EI} \quad f_{0,2} = -\frac{\sqrt{3}}{288} \frac{FL^3}{EI}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{64} \frac{FL^2}{EI} \quad \tan \beta = -\frac{FL^2}{32EI} \quad \tan \gamma = \frac{1}{64} \frac{FL^2}{EI}$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} V_{AD}(x_1) = \frac{13}{32}F \\ V_{DB}(x_1) = -\frac{19}{32}F \end{cases} \quad \begin{cases} M_{AD}(x_1) = \frac{13}{32}Fx_1 \\ M_{DB}(x_1) = \frac{F}{32}(16L - 19x_1) \end{cases}$$

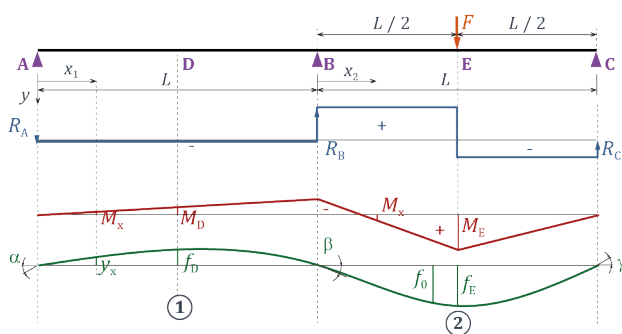
$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} V_{BC}(x_2) = \frac{3}{32}F \\ V_{EC}(x_2) = -\frac{13}{32}F \end{cases} \quad \begin{cases} M_{BC}(x_2) = -\frac{3}{32}F(L - x_2) \\ M_{EC}(x_2) = \frac{13}{64}F(L - x_2) \end{cases}$$

$$y_{AD}(x_1) = \frac{F}{192EI} x_1 (9L^2 - 13x_1^2)$$

$$y_{DB}(x_1) = \frac{F}{192EI} (L - x_1) [29Lx_1 - 4L^2 - 19x_2^2]$$

$$y_{BC}(x_2) = -\frac{F}{64EI} x_2 (L - x_2)(2L - x_2)$$

T2-06



$$R_A = -\frac{3}{32}F \quad R_B = \frac{11}{16}F \quad R_C = \frac{13}{32}F$$

$$V_A = V_{B,1} = -\frac{3}{32}F \quad V_{B,2} = \frac{19}{32}F \quad V_C = -\frac{13}{32}F$$

$$M_B = -\frac{3}{32}FL \quad M_D = -\frac{3}{64}FL \quad M_E = \frac{13}{64}FL$$

$$f_D = -\frac{3}{512} \frac{FL^3}{EI} \quad f_E = \frac{23}{1536} \frac{FL^3}{EI}$$

$$f_{0,1} = -\frac{\sqrt{3}}{288} \frac{FL^3}{EI} \quad f_{0,2} = \sqrt{\frac{3}{13}} \frac{FL^3}{32EI}$$

$$\tan \alpha = -\frac{1}{64} \frac{FL^2}{EI} \quad \tan \beta = \frac{FL^2}{32EI} \quad \tan \gamma = -\frac{3}{64} \frac{FL^2}{EI}$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} V_{AB}(x_1) = -\frac{3}{32}F \\ V_{BE}(x_2) = \frac{19}{32}F \end{cases} \quad \begin{cases} M_{AB}(x_1) = -\frac{3}{32}Fx_1 \\ M_{BE}(x_2) = \frac{F}{32}(19x_2 - 3L) \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} V_{EC}(x_2) = -\frac{13}{32}F \\ V_{BC}(x_2) = \frac{3}{32}F \end{cases} \quad \begin{cases} M_{EC}(x_2) = \frac{13}{64}F(L - x_2) \\ M_{BC}(x_2) = -\frac{3}{32}F(L - x_2) \end{cases}$$

$$y_{AB}(x_1) = -\frac{F}{64EI} x_1 (L^2 - x_1^2)$$

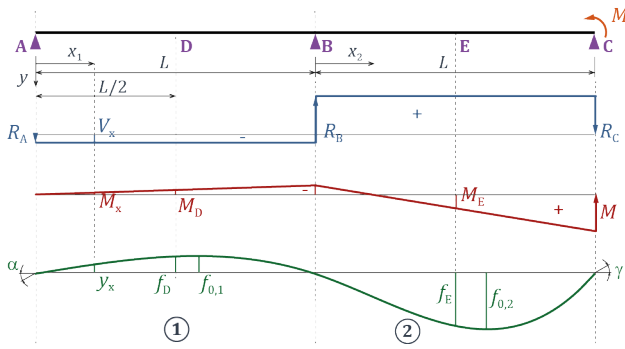
$$y_{BE}(x_2) = \frac{F}{192EI} x_2 (6L^2 + 9Lx_2 - 19x_2^2)$$

$$y_{EC}(x_2) = \frac{F}{192EI} (L - x_2) (26Lx_2 - 13x_2^2 - 4L^2)$$

R_A, R_B	Réactions (efforts verticaux) aux appuis
M_{RA}, M_{RB}	Réactions (moments) aux appuis
V	Effort tranchant
M	Moment fléchissant
M_0	Moment fléchissant maximal

$y(x)$	Déformée élastique en flexion
f	Flèche
f_0	Flèche maximale
α, β, γ	Déformations angulaires

T2-07



$$R_A = -\frac{1}{4} \frac{M}{L} \quad R_B = \frac{3}{2} \frac{M}{L} \quad R_C = -\frac{5}{4} \frac{M}{L}$$

$$V_A = V_{B,1} = -\frac{1}{4} \frac{M}{L} \quad V_{B,2} = V_C = \frac{5}{4} \frac{M}{L}$$

$$M_B = -\frac{M}{4} \quad M_D = -\frac{M}{8} \quad M_E = \frac{3}{8} M$$

$$f_D = -\frac{M L^2}{64 EI} \quad f_E = \frac{3 M L^2}{64 EI}$$

$$f_{0,1} = -\frac{\sqrt{3} M L^2}{108 EI} \quad f_{0,2} = \frac{M L^2}{900 EI} \left(18 + 13 \frac{\sqrt{39}}{3} \right)$$

$$\tan \alpha = -\frac{1}{24} \frac{M L}{EI} \quad \tan \beta = \frac{1}{12} \frac{M L}{EI} \quad \tan \gamma = -\frac{7}{24} \frac{M L}{EI}$$

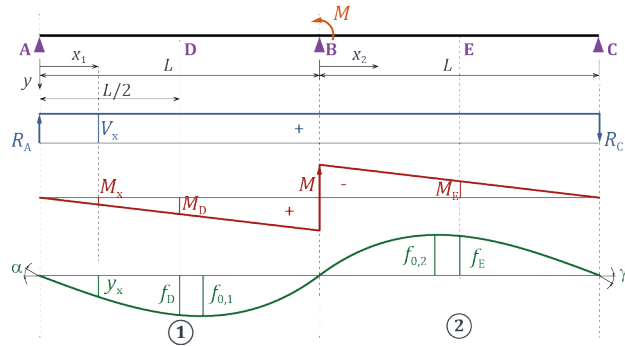
$$\textcircled{1} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{AB}(x_1) = -\frac{1}{4} \frac{M}{L} \\ M_{AB}(x_1) = -\frac{M x_1}{4 L} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{BC}(x_2) = \frac{5}{4} \frac{M}{L} \\ M_{BC}(x_2) = \frac{M}{4L} (5 x_2 - L) \end{array} \right.$$

$$y(x_1) = -\frac{M}{24 EI L} x_1 (L^2 - x_1^2)$$

$$y(x_2) = \frac{M}{48 EI L} x_2 (L - x_2)(4L + 10x_2)$$

T2-08



$$R_A = R_C = \frac{1}{2} \frac{M}{L} \quad R_B = 0$$

$$V_A = V_B = V_C = \frac{1}{2} \frac{M}{L}$$

$$f_D = -f_E = \frac{M L^2}{32 EI}$$

$$f_{0,1} = -f_{0,2} = \frac{M L^2}{18 \sqrt{3} EI}$$

$$\tan \alpha = \frac{M L}{12 EI} \quad \tan \beta = -\frac{M L}{6 EI} \quad \tan \gamma = \frac{M L}{12 EI}$$

$$\textcircled{1} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{AB}(x_1) = \frac{1}{2} \frac{M}{L} \\ M_{AB}(x_1) = \frac{M x_1}{2 L} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{BC}(x_2) = \frac{1}{2} \frac{M}{L} \\ M_{BC}(x_2) = -\frac{M}{2} \left(1 - \frac{x_2}{L} \right) \end{array} \right.$$

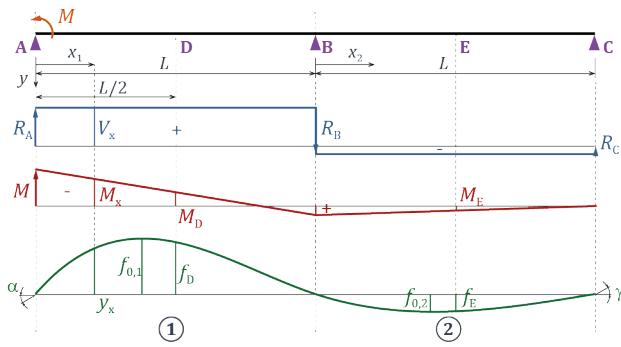
$$y(x_1) = \frac{M}{12 EI L} x_1 (L^2 - x_1^2)$$

$$y(x_2) = -\frac{M}{12 EI L} x_2 (L - x_2)(2L - x_2)$$

R_A, R_B	Réactions (efforts verticaux) aux appuis
M_{RA}, M_{RB}	Réactions (moments) aux appuis
V	Effort tranchant
M	Moment fléchissant
M_0	Moment fléchissant maximal

$y(x)$	Déformée élastique en flexion
f	Flèche
f_0	Flèche maximale
α, β, γ	Déformations angulaires

T2-09



$$\begin{aligned}
 R_A &= \frac{5M}{4L} & R_B &= -\frac{3M}{2L} & R_C &= \frac{1M}{4L} \\
 V_A = V_{B,1} &= \frac{5M}{4L} & V_{B,2} = V_C &= -\frac{1M}{4L} \\
 M_B &= -\frac{M}{4} & M_D &= \frac{3M}{8} & M_E &= -\frac{1M}{8} \\
 f_D &= -\frac{3ML^2}{64EI} & f_E &= \frac{ML^2}{64EI} \\
 f_{0,1} &= -\frac{ML^2}{900EI} \left(18 + 13 \frac{\sqrt{39}}{3} \right) & f_{0,2} &= \frac{\sqrt{3}ML^2}{108EI} \\
 \tan \alpha &= -\frac{7ML}{24EI} & \tan \beta &= \frac{1ML}{12EI} & \tan \gamma &= -\frac{1ML}{24EI}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & V_{AB}(x_1) = \frac{5M}{4L} & M_{AB}(x_1) &= \frac{M}{4L} (4L - 5x_1) \\
 \textcircled{2} \quad & V_{BC}(x_2) = -\frac{1M}{4L} & M_{BC}(x_2) &= \frac{M}{4L} (x_2 - L)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(x_1) &= -\frac{M}{24EI L} x_1 (L - x_1)(7L - 5x_1) \\
 y(x_2) &= \frac{M}{24EI L} x_2 (L - x_2)(2L - x_2)
 \end{aligned}$$