

Partie 2 : Exemple d'application

Le présent article illustre un exemple d'application de la méthode présentée dans la [1^{re} partie de cette série](#) visant à déterminer la réponse vibratoire d'une poutre soumise à une charge de marche, avec un complément d'évaluation du confort vibratoire de la structure vis-à-vis de ses occupants, sur la base d'une réponse en accélération.

Données d'étude

- Poutre :
Portée : $L = 7,4$ m
Masse linéique : $m = 2600$ kg/m
 $EI = 70000$ kN.m²
Taux d'amortissement critique : $\xi = 0,4$ % ($0,004 \ll 1$)
- Chargement :
Masse de la personne : $m_p = 75$ kg, donc $G \cong 750$ N
Fréquence de marche : $f_p = 2$ Hz (deux pas par seconde)
Vitesse de marche : $v_p = 1,5$ m/s (chaque pas faisant 0,75 m)

On se limite à 2 harmoniques de marche, soit $H = 2$. Pour représenter cette activité, on peut adopter les valeurs suivantes des coefficients de la série de Fourier : $\alpha_1 = 0,5$ et $\alpha_2 = 0,15$ tout en prenant comme déphasages $\phi_1 = \phi_2 = 0$.

Paramètres de base

- Durée du mouvement : $T = \frac{L}{v_p} = \frac{7,4}{1,5} = 4,93$ s
- Pulsations : $\omega_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} = \left(\frac{\pi}{7,4}\right)^2 \sqrt{\frac{7 \times 10^7}{2600}} = 29,57$ rad/s
 $\omega_b = \xi \omega_1 = 0,004 \times 29,57 = 0,12$ rad/s
 $\omega = \frac{\pi v_p}{L} = \frac{1,5 \pi}{7,4} = 0,64$ rad/s $\ll \omega_1$
- Flèche : $u_0 = \frac{G L^3}{48 EI} = \frac{750 \times 7,4^3}{48 \times 7 \times 10^7} = 0,0905$ mm

Les conditions d'application de la méthode simplifiée sont bien vérifiées.

Calcul de la réponse en déplacement

Note : l'indice des formules fait référence aux équations données dans la première partie.

En utilisant la formule (2), la réponse vibratoire de la poutre vis-à-vis de la charge G est :

$$u_G(x, t) = u_0 \sin(\omega t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$u_G(x, t) = 9,05 \times 10^{-5} \sin(0,64 t) \sin(0,42 x)$$

Pour le 1^{er} harmonique, on détermine d'abord les fonctions $A(t)$ et $B(t)$ en exploitant les formules (5) à (7), ce qui donne :

$$A_\omega = \left[\left(\left(\frac{\omega_1}{\Omega} \right)^2 - 1 \right)^2 + 4 \left(\frac{\omega_b}{\Omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 4,53$$

$$\varphi = -\text{Arctan} \left(\frac{2 \left(\frac{\omega_b}{\Omega} \right)}{\left(\frac{\omega_1}{\Omega} \right)^2 - 1} \right) = -4,19 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$A(t) = A_\omega \sin(\Omega t + \varphi) \sin(\omega t) = 4,53 \sin(12,57t - 4,19 \times 10^{-3}) \sin(0,64t)$$

$$B(t) = 2 \left(\frac{\omega}{\Omega} \right) [\cos(\Omega t) \cos(\omega t) - e^{-\omega_b t} \cos(\omega_1 t)]$$

$$B(t) = 0,1 [\cos(12,57t) \cos(0,64t) - e^{-0,12t} \cos(29,57t)]$$

L'expression (4) permet de déduire la réponse associée comme suit :

$$K_\omega = \left(\frac{\omega_1}{\Omega} \right)^2 \frac{1}{\left(\left(\frac{\omega_1}{\Omega} \right)^2 - 1 \right)^2 + 4 \left(\left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 + \left(\frac{\omega_b}{\Omega} \right)^2 \right)} \approx 0,27$$

$$u_q = \frac{0,5G L^3}{48 EI} = \frac{0,5 \times 750 \times 7,4^3}{48 \times 7 \times 10^7} = 0,0452 \text{ mm}$$

$$u_h(x, t) = u_q K_\omega [A(t) + B(t)] \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$u_{h_1}(x, t) = 1,22 \times 10^{-5} [A(t) + B(t)] \sin(0,42x)$$

La même procédure est suivie pour le 2^e harmonique fournissant les fonctions $A(t)$ et $B(t)$ suivantes :

$$A(t) = 0,39 \sin(25,13t - 0,025) \sin(0,64t)$$

$$B(t) = 0,05 [\cos(25,13t) \cos(0,64t) - e^{-0,12t} \cos(29,57t)]$$

La réponse vibratoire correspondante s'écrit alors :

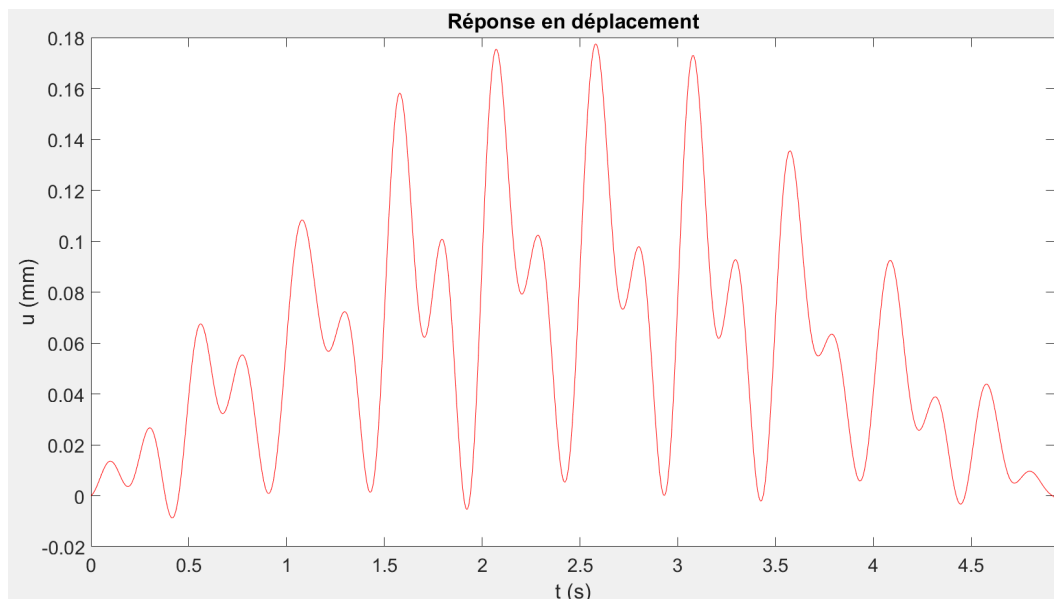
$$u_{h_2}(x, t) = 1,23 \times 10^{-4} [A(t) + B(t)] \sin(0,42x)$$

Finalement, la réponse totale s'obtient par superposition des trois réponses antérieures, selon la formule (9) :

$$u(x, t) = u_G(x, t) + u_{h_1}(x, t) + u_{h_2}(x, t)$$

Profil de la réponse en déplacement

On présente le profil temporel de la réponse en déplacement de la poutre pour $x = L / 2$:

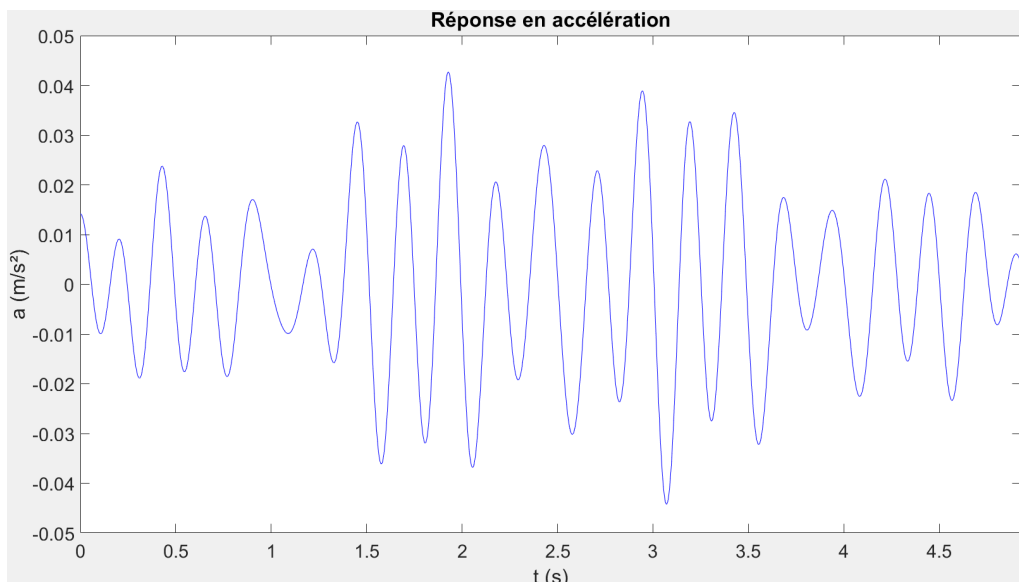


La réponse maximale est obtenue à $t = 2,58$ s et vaut $u_{max} = 0,18$ mm.

Réponse en accélération

L'accélération est la grandeur la plus utilisée pour l'évaluation du confort vibratoire des structures par les guides existants.

En suivant la méthodologie décrite dans la partie 1 de cet article, la réponse en accélération de la poutre est calculée et l'allure correspondante à mi-portée est illustrée ci-après :



L'accélération maximale vaut, en valeur absolue, $a_{max} = 44,2$ mm/s² à $t = 3,07$ s.

Complément : Evaluation du confort vibratoire

L'accélération efficace s'écrit pour une série discrète d'accélération de pas de temps dt et de taille N :

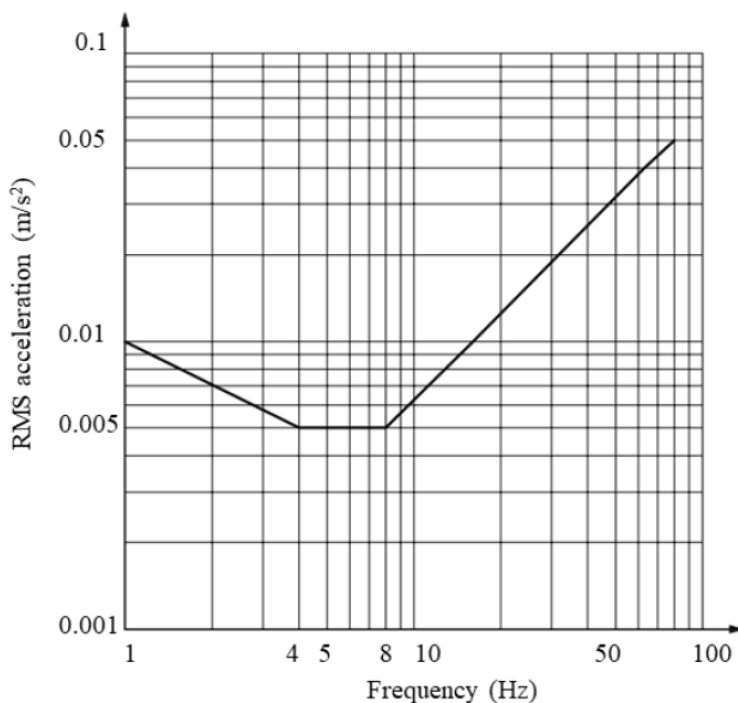
$$a_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i^2}$$

a_i étant l'accélération de la poutre à l'instant $(i - 1) dt$, i étant compris entre 1 et N .

Pour le cas présent, la durée du signal est discrétisée avec un pas de temps $dt = 10^{-3}$ s entraînant un nombre d'échantillons $N = 4934$ pour le signal de réponse.

En utilisant la formule ci-dessus, on obtient à mi-portée de la poutre : $a_{rms} = 17,6 \text{ mm/s}^2$.

Conformément à la norme NF EN ISO 10137 [1], les vibrations verticales sont perçues si les accélérations efficaces dépassent les valeurs de la courbe limite suivante :



L'accélération efficace dépasse le seuil de perception à 2 Hz ($a_{lim} = 7 \text{ mm/s}^2$), fréquence d'excitation principale de la structure, montrant que les vibrations sont bien perceptibles par les occupants.

Pour évaluer l'acceptabilité de ces vibrations, on détermine le coefficient de réponse selon la norme ISO (a_{rms} en m/s^2) :

$$R = \frac{a_{rms}}{0,005}$$

Pour notre cas, on trouve $R = 3,52$.

Ce coefficient est à comparer à un coefficient limite donné par la norme [1], qui dépend de deux éléments principaux :

- Le type d'usage de la structure accueillant la poutre étudiée, définissant le degré de sensibilité des occupants vis-à-vis des vibrations.
- Les effets directs influençant la réaction des utilisateurs aux vibrations, dont figurent la posture du récepteur, la direction d'incidence de vibration, la fréquence d'excitation, la variabilité et la période des vibrations (en jour ou en nuit).

Les effets indirects affectant le confort (incluant par exemple le type de population, la familiarisation des utilisateurs aux vibrations, la détection de la personne excitant la structure, la présence de nuisances sonores avoisinantes, etc.) ne sont pas pris en compte par la norme.

Pour le présent cas d'étude, les conditions de vibration sont les suivantes :

- La poutre se trouve au sein d'un bâtiment de bureaux courants.
- Posture du récepteur : debout, direction d'incidence de vibration : verticale, fréquence d'excitation : $f_p = 2$ Hz, variabilité : excitation continue, période : le jour.

En tenant compte de ces conditions, le coefficient de réponse est limité à 4. Les vibrations ayant un coefficient de réponse $R = 3,52$ sont donc acceptables pour le cas d'étude vis-à-vis du confort vibratoire des utilisateurs.

Références

[1] NF EN ISO 10137: Bases for design of structures – Serviceability of buildings and walkways against vibrations, ISO, 2007.